第 40 卷 第 5 期
2023 年 10 月

应 用 力 学 学 报
Chinese Journal of Applied Mechanics

Vol. 40 No. 5
Oct. 2023

文章编号:1000-4939(2023)05-1180-08

分数阶模型模拟混凝土徐变特性的多参数识别

邓婧雯,王新龙,李沛锖,徐泽南,朱俊安,范文萍

(江南大学理学院,214122 无锡)

摘 要:本研究主要研究混凝土徐变特性的分数阶模型拟合及其多参数识别问题。在模型方面,提出利用修正的分数阶 Maxwell 模型和分数阶 Poynting-Thomson 模型两种模型模拟混凝土的徐变实验数据,并将结果进行对比,通过数据拟合和误差分析验证两种模型的有效性。在多参数识别方面,分别采用贝叶斯算法和布谷鸟搜索算法两种算法识别两个模型中的多个参数。研究表明:修正的分数阶 Maxwell 模型和分数阶 Poynting-Thomson 模型在刻画混凝土徐变特性中均是有效的;贝叶斯算法和布谷鸟搜索算法在分数阶模型的多参数估计问题中均是可行的,但布谷鸟算法搜索速度更快、误差更小、效率更高,在分数阶模型的多参数识别问题中性能更优。

关键词:混凝土徐变;分数阶模型;多参数识别;贝叶斯算法;布谷鸟搜索算法

中图分类号:O29 **文献标志码**:A **DOI**:10.11776/j.issn.1000-4939.2023.05.024

Fractional-order model simulation and multi-parameter identification for the creep behavior of concrete

DENG Jingwen, WANG Xinlong, LI Peiqiang, XU Zenan, ZHU Jun'an, FAN Wenping

(School of Science, Jiangnan University, 214122 Wuxi, China)

Abstract: Focusing on the creep behavior of concrete, the fractional-order model simulation and the corresponding multi-parameter identification are studied and analyzed in this paper. Both the modified fractional Maxwell model and the fractional Poynting-Thomson model are proposed to simulate experimental data of concrete creep. The results are compared, and the validity of the two models is verified by data fitting and error analysis. As for the corresponding multi-parameter identification, both the Bayesian algorithm and the cuckoo search algorithm are used to identify the multiple parameters in the two models. Results show that the modified fractional Maxwell model and fractional Poynting-Thomson model are both effective in describing the creep characteristics of concrete. Both the Bayesian algorithm and the cuckoo search algorithm are feasible in the fractional multi-parameter estimation problem, but the cuckoo algorithm has higher search speed, smaller error, higher efficiency, and better performance in the multi-parameter identification problem of the fractional order model.

Key words: creep behavior of concrete; fractional-order model; multi-parameter identification; Bayesian algorithm; cuckoo search algorithm

---

收稿日期:2022-10-11 **修回日期**:2022-12-23

基金项目:国家自然科学基金资助项目(No. 11801221)

通信作者:范文萍,副教授。E-mail:wpfan@jiangnan.edu.cn

引用格式:邓婧雯,王新龙,李沛锖,等. 分数阶模型模拟混凝土徐变特性的多参数识别[J]. 应用力学学报,2023,40(5):1180-1187.

DENG Jingwen, WANG Xinlong, LI Peiqiang, et al. Fractional-order model simulation and multi-parameter identification for the creep behavior of concrete[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2023, 40(5):1180-1187.

混凝土是当代最主要的建筑材料之一,被广泛应用于土木工程、造船业、地热工程等行业。研究混凝土的徐变、松弛等特性,对现代社会的建筑稳定性和安全性具有重要意义。

近年来,已有不少学者致力于研究混凝土徐变特性的本构模型表达[1-2]。由于整数阶导数算子是局部算子,不能很好地描述非局部行为,而分数阶导数算子是非局部算子,具有时间上的记忆效应和空间上的长程依赖性。近年来,分数阶本构模型成为黏弹性材料研究领域的热点之一[3]。张为民等[4]研究表明,利用分数阶导数模型模拟混凝土的黏弹性特性,误差更小,计算效果更好。梅生启[5]构建了一种修正的分数阶 Maxwell 模型,模拟了混凝土的徐变及其徐变恢复特性,并利用非线性最小二乘算法给出了模型中的参数取值。朱端等[6]基于分数阶 Burgers 模型研究了早龄期混凝土的徐变特性。

与分数阶导数建模的实际应用相关联的一个重要问题是确定模型中的重要参数[7-9]。FAN 等[10]利用贝叶斯算法研究了广义分数阶单元网络 Zener 模型的参数估计问题。杨秀[11]对比分析了拟牛顿算法、非线性共轭梯度方法与贝叶斯算法在分数阶模型参数估计问题中的可行性,结果表明,对于多参数识别问题,贝叶斯算法更加有效。CHI 等[12]利用布谷鸟算法实现了对分数阶微分方程的参数估计。

鉴于目前对混凝土材料的研究大多集中于模型拟合,而对相关模型的多参数识别问题研究较少,本研究基于混凝土材料的徐变实验数据,研究分数阶模型在模拟混凝土黏弹特性中的应用及其多参数识别问题。提出利用修正的分数阶 Maxwell 模型和分数阶 Poynting-Thomson 模型模拟混凝土的徐变数据,并将研究结果进行对比,分析两种分数阶模型在模拟混凝土徐变特性中的可行性;针对分数阶本构模型,研究相关的多参数识别问题,分别利用贝叶斯算法和布谷鸟搜索算法同时识别分数阶模型中的多个参数。最后给出数值算例,分析贝叶斯算法和布谷鸟搜索算法在混凝土分数阶徐变模型的多参数识别中的有效性。

1　分数阶黏弹性本构模型

本研究主要研究修正的分数阶 Maxwell 模型和分数阶 Poynting-Thomson(FPT)模型在模拟混凝土徐变特性方面的可行性。

1.1　修正的分数阶 Maxwell 模型

分数阶 Maxwell 模型由一个弹性元件及一个分数阶元件串联而成,而修正的分数阶 Maxwell 模型则是在分数阶 Maxwell 模型的基础上增加一个黏性元件,如图 1 所示。

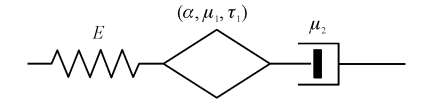


图 1　修正的分数阶 Maxwell 模型

Fig. 1　Modified fractional Maxwell model

修正的分数阶 Maxwell 模型的本构关系为

$$\frac{\sigma(t)}{\mu_2}+\frac{1}{E}\cdot\frac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\mu_1\cdot\tau_1^{\alpha}}\cdot\frac{\mathrm{d}^{1-\alpha}\sigma(t)}{\mathrm{d}t^{1-\alpha}}=\frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}\tag{1}$$

其中:$\sigma(t)$ 为应力函数;$\varepsilon(t)$ 为应变函数;t 表示时间;E 为弹性系数;μ_1 为分数阶元件的单元参数;τ_1 为松弛时间;$0<\alpha\leqslant 1$ 为分数阶导数阶数;μ_2 为黏性系数;$\mathrm{d}^{\alpha}f(t)/\mathrm{d}t^{\alpha}$ 为连续函数 $f(t)$ 的 Riemann-Liouville导数,且

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}f(t)}{\mathrm{d}t^{\alpha}}=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t\frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}\mathrm{d}\tau,$$
$$(t>0,0<\alpha\leqslant 1)$$

其中,$\Gamma(\cdot)$ 为 Gamma 函数。

在荷载持续作用下,修正的分数阶 Maxwell 模型[13]的徐变柔量可得为

$$J(t)=\frac{1}{E}+\frac{t^{\alpha}}{\mu_1\cdot\tau_1^{\alpha}\cdot\Gamma(1+\alpha)}+\frac{t}{\mu_2}\tag{2}$$

当持荷 σ_0 时,修正的分数阶 Maxwell 模型在持荷阶段的应变表达式为

$$\begin{aligned}\varepsilon(t)&=J(t)\cdot\sigma_0+\hat{\varepsilon}_0\\&=\left(\frac{1}{E}+\frac{t^{\alpha}}{\mu_1\cdot\tau_1^{\alpha}\cdot\Gamma(1+\alpha)}+\frac{t}{\mu_2}\right)\cdot\sigma_0+\hat{\varepsilon}_0\end{aligned}\tag{3}$$

其中,$\hat{\varepsilon}_0$ 为初始应变。

1.2　分数阶 Poynting-Thomson 模型

FPT 模型由一个弹性元件、一个黏性元件和一个分数阶元件[14]构成,如图 2 所示。

FPT 模型的应力应变本构关系[13]为

$$\begin{aligned}&\sigma(t)+\frac{\mu_2}{E}\cdot\frac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{\mu_1\tau_1^{\alpha}}{E}\cdot\frac{\mathrm{d}^{\alpha}\sigma(t)}{\mathrm{d}t^{\alpha}}\\&=\mu_2\frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}+\mu_1\tau_1^{\alpha}\frac{\mathrm{d}^{\alpha}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t^{\alpha}}\end{aligned}\tag{4}$$

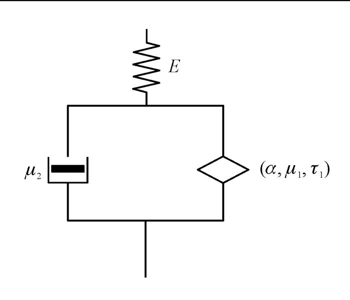


图2 FPT模型

Fig. 2 FPT model

在荷载持续作用下,FPT模型的徐变柔量[15]为

$$J(t) = \frac{1}{E} + \frac{t}{\mu_2}E_{1-\alpha,2}\left(-\frac{t^{1-\alpha}\tau_1^{\alpha}}{\mu_2/\mu_1}\right) \tag{5}$$

其中$E_{p,q}$为广义Mittag-Leffler(M-L)函数,定义为

$$E_{p,q}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(pn+q)},(z \in C,p>0,q>0)$$

当持荷为σ_0时,FPT模型在持荷阶段的应变表达式为

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= J(t)\cdot\sigma_0 + \hat{\varepsilon}_0 \\ &= \left[\frac{1}{E} + \frac{t}{\mu_2}E_{1-\alpha,2}\left(-\frac{t^{1-\alpha}\tau_1{}^{\alpha}}{\mu_2/\mu_1}\right)\right]\cdot\sigma_0 + \hat{\varepsilon}_0\end{aligned} \tag{6}$$

当FPT模型中的弹性元件和黏性元件替换为分数阶单元时,模型推广为广义的分数阶FPT模型[16]。JIANG等[16]研究表明分数阶FPT模型比一般的组合模型拟合精度更高,既能避免整数阶模型在蠕变曲线拐点附近与试验数据拟合效果差的弊端,又能反映蠕变的非线性渐变过程,可以更好地描述材料的黏弹特性。

2 多参数识别算法

2.1 贝叶斯算法

贝叶斯算法的基本原理在于利用与未知变量有关的统计数据来获取未知变量的条件分布函数[17]。在先验信息较少的情况下,相较于极大似然估计法,贝叶斯算法的模拟效果更佳[18]。贝叶斯基本公式为

$$p(\theta|y) = \frac{p(y|\theta)p(\theta)}{p(y)} \tag{7}$$

其中:θ代表待估计参数;y代表与之相关的统计数据;$p(\theta|y)$代表后验概率密度函数;$p(y|\theta)$为似然函数;$p(\theta)$是未知变量θ的先验概率密度函数。若实验数据y是已知量,则贝叶斯定理也可以表示为

$$p(\theta|y) \propto p(y|\theta)p(\theta) \tag{8}$$

基于后验概率密度函数,可采用多种方法进行未知量的点估计,如最大后验估计(MAP):$\hat{\theta}_{\mathrm{MAP}} = aug\max_{\theta}p(\theta|y)$,或后验均值估计:$\hat{x}_{\mathrm{postmean}} = E_{\theta|y}\theta|y$。

本研究采用后验均值估计对模型中的未知参数进行识别。对于待识别参数的先验概率分布,本研究均选为高斯分布。假设参数θ服从均值为u,方差为v_σ的高斯分布,记作$\theta \sim N(u,v_\sigma)$,则$\theta$的先验概率分布函数为

$$f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v_\sigma}}\exp\left[-\frac{(\theta-u)^2}{2v_\sigma}\right] \tag{9}$$

此时,似然函数$p(y|\theta)$表达式为[10]

$$p(y|\theta) = \frac{1}{(2\pi v_\sigma)^{\frac{N}{2}}}\exp\left(-\frac{(\varepsilon(\theta)-y)^{\mathrm{T}}(\varepsilon(\theta)-y)}{2v_\sigma}\right) \tag{10}$$

其中:$\varepsilon(\theta)$为参数为θ时的模型计算值;v_σ为统计数据y中独立同分布的高斯随机噪声的方差;N为统计数据y的长度。

贝叶斯算法中,从当前状态过渡至新的状态时设定了一个接受概率,具体表示为

$$P_i = \min\left\{1,\frac{p(\theta_i')}{p(\theta_i)}\cdot\frac{p(y|\theta_i')}{p(y|\theta_i)}\cdot\frac{q(\theta_i|\theta_i')}{q(\theta_i'|\theta_i)}\right\} \tag{11}$$

其中:θ_i表示当前状态的第i个参数的值;θ_i'表示建议的新状态的第i个参数的值;$q(\theta_i'|\theta_i)$为建议分布函数,一般表达式为[10]

$$q(\theta_i'|\theta_i) \propto N(\theta_i,\sigma_q) \tag{12}$$

贝叶斯算法的算法流程如算法1所示。

算法1 贝叶斯算法

1)确定参数的先验分布$p(\theta_1),p(\theta_2),\cdots,p(\theta_n)$及参数的初始值;

2)while j < 最大允许迭代次数;

3)for $i = 1:n$;

4)产生服从建议分布$q(\theta_i'|\theta_i)$的新参数θ_i';

5)计算接受新参数的接受概率P_i;

6)产生[0,1]之间的随机数r与P_i比较判断,若$r < P_i$则接受新参数θ_i',否则保持原值;

7)end for;

8)end while。

2.2　布谷鸟搜索算法

布谷鸟搜索算法(cuckoo search,CS)是一种群智能优化算法,常用于求优化问题的近似解。它模拟布谷鸟的巢寄生殖行为寻找最优解,同时利用莱维飞行确定布谷鸟每次搜索的步长[19]。为了便于描述布谷鸟的巢寄生殖行为,在布谷鸟搜索算法中有以下 3 个理想规则[20]。规则:每只布谷鸟一次只产一个卵,并随机选择一个位置的鸟巢进行孵化;在随机选择的一组鸟巢中,质优的鸟巢将会被保留到下一代;可利用的鸟巢数量固定,鸟巢主人发现外来鸟蛋的概率为 $P \in [0,1]$ 。当鸟巢主人发现外来的布谷鸟蛋的时候,它会将布谷鸟蛋丢弃或者重新建立新的鸟巢。

基于上述规则,布谷鸟位置更新公式为[21]

$$X_i^{t+1} = X_i^t + \gamma \otimes L(s,\lambda) \tag{13}$$

其中:X_i^t 表示第 i 个鸟巢在第 t 代的鸟巢位置;$\otimes$ 表示点对点乘法;$\gamma > 0$ 表示步长的控制量,取为向量,具体计算为 $\gamma = \gamma_0(X_j^t - X_i^t)$,γ_0 为常数,X_i^t 、X_j^t 为种群中随机选择的两个个体;$L(s,\lambda)$ 为莱维飞行的随机搜索路径,其莱维飞行的方向服从均匀分布,其行走步长服从莱维分布[21],即

$$L(s,\lambda) = \frac{\lambda \Gamma(\lambda)\sin\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)}{\pi}\frac{1}{s^{1+\lambda}} = \frac{\mu}{|v|^{1/\beta}},(s \gg 0) \tag{14}$$

其中:$1 \leqslant \beta \leqslant 2$;μ 和 v 均为服从正态分布的随机数,$\mu \sim N(0,\sigma_\mu^2)$,$v \sim N(0,\sigma_v^2)$,$\sigma_v = 1$,参数 σ_μ 的计算公式为[22]

$$\sigma_\mu = \left\{\frac{\Gamma(1+\beta)\sin(\pi\beta/2)}{\Gamma[(1+\beta)/2]2^{(\beta-1)/2}\beta}\right\}^{1/\beta} \tag{15}$$

布谷鸟搜索算法的算法流程如下。

算法 2　布谷鸟搜索算法

1)初始化种群,设置 $P = 0.25$;

2)while $g <$ 最大迭代次数;

3)计算每个鸟巢的适应度;

4)保留最优的鸟巢位置,每次迭代都对其进行更新;

5)利用莱维飞行得到新的位置;

6)与上一代鸟巢比较,择优保存;

7)产生 $[0,1]$ 之间的随机数 r 与 P 比较判断,若 $r < P$ 则接受新鸟巢,否则保持原值;

8)end while。

3　混凝土徐变实验数据拟合

为了验证修正的分数阶 Maxwell 模型和 FPT 模型在模拟混凝土徐变特性中的可行性及参数识别算法的有效性,本研究分别采用修正的分数阶 Maxwell 模型和 FPT 模型两种模型对 C40 强度混凝土在荷载速率为 1 kN/s 时的徐变测试数据[5]进行拟合。在参数识别过程中,分别采用贝叶斯算法和布谷鸟算法确定分数阶模型中的多个参数,并将两种算法所得结果进行对比,分析两种算法的有效性。

为了刻画分数阶模型对实验数据的拟合效果,记模型模拟结果与实验数据之间的误差为

$$e = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}[\log(\varepsilon^{\exp}(t_k)+1) - \log(\varepsilon^{\mathrm{num}}(t_k)+1)]^2} \tag{16}$$

其中:$\varepsilon^{\exp}(t)$ 表示模型计算值;$\varepsilon^{\mathrm{num}}(t)$ 表示实验数据测量值。在布谷鸟算法中,采用模型输出与实验数据的误差倒数作为适应度对算法结果进行评价,即适应度为 $1/e$ 。

在数值算例中,弹性系数 E 取为 32.39 GPa。在修正的分数阶 Maxwell 模型中,待识别参数为 $\theta_1 = (\alpha_1,\mu_{11},\mu_{12},\tau_{11})$,在 FPT 模型中待识别参数为 $\theta_2 = (\alpha_2,\mu_{21},\mu_{22},\tau_{21})$ 。

对于修正的分数阶 Maxwell 模型和 FPT 模型,模型中的分数阶单元由 3 个参数(α,μ_1,τ_1)表征,然而,通过数值实验发现,虽然参数 μ_1 、τ_1 的取值不稳定,但 $\mu_1\tau_1^\alpha$ 始终趋于一个稳定值,故在参数估计结果中,将 $\mu_1\tau_1^\alpha$ 作为一个整体来分析。

3.1　修正的分数阶 Maxwell 模型拟合及参数识别

利用修正的分数阶 Maxwell 模型拟合混凝土的徐变实验数据,并确定模型参数。在贝叶斯算法中,参数初始迭代值 $\theta_1^0 = (\alpha_1^0,\mu_{11}^0,\mu_{12}^0,\tau_{12}^0)$ 取为(0.5,1,1,1),在布谷鸟算法中,参数初值在 $\alpha_1^0 \in [0,1]$,$\mu_{11}^0 \in [0,20]$,$\mu_{12}^0 \in [0,5]$,$\tau_{11}^0 \in [0,100]$ 范围内随机生成,参数 β 取为 1.5。

图 3 为利用贝叶斯算法所得的修正的分数阶 Maxwell 模型中参数 α_1 、$1/(\mu_{11}\tau_{11}^\alpha)$ 、$1/\mu_{12}$ 的迭代结果图。图 4 为利用布谷鸟搜索算法所得的参数 α_1、$1/(\mu_{11}\tau_{11}^\alpha)$、$1/\mu_{12}$ 的迭代结果图。由图可见,在迭代一定次数后,两种算法所得的参数均趋于稳定值,说明贝叶斯算法和布谷鸟搜索算法在分数阶模

型参数估计问题中是均是收敛的。但布谷鸟搜索算法达到稳定时所需的迭代次数更少,说明布谷鸟搜索算法在该分数阶多参数识别问题中效率更高,速度更快。

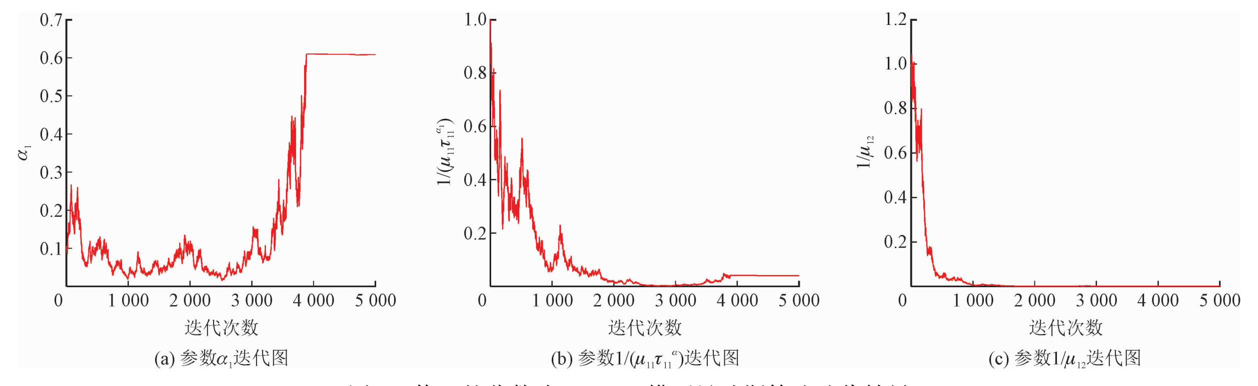


图3 修正的分数阶 Maxwell 模型贝叶斯算法迭代结果

Fig. 3 The Bayesian algorithm iteration results of modified fractional Maxwell model

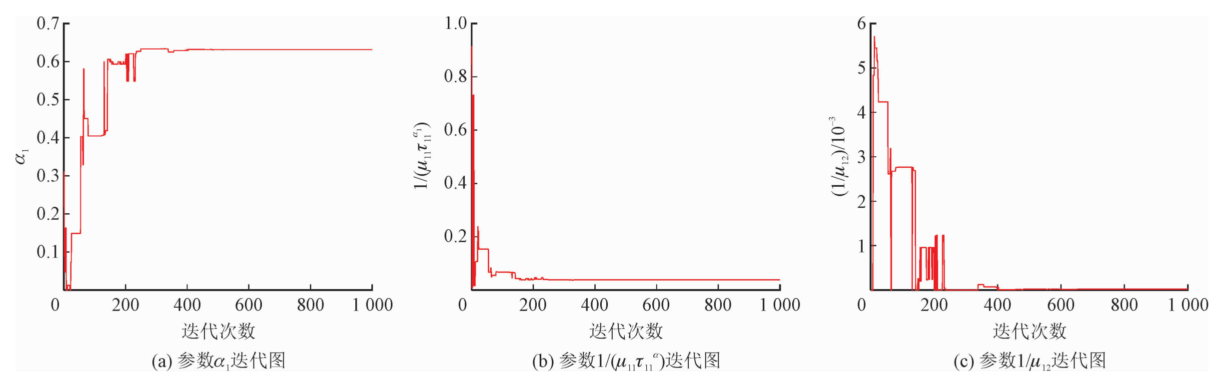


图4 修正的分数阶 Maxwell 模型布谷鸟搜索算法迭代结果

Fig. 4 The cuckoo search algorithm iteration results of modified fractional Maxwell model

图5表示布谷鸟搜索算法的适应度迭代图。可以看出,随着迭代次数的增加,模型输出与实验数据的误差逐渐减小且趋于一个稳定值,进一步说明布谷鸟搜索算法在分数阶多参数识别中是有效的。

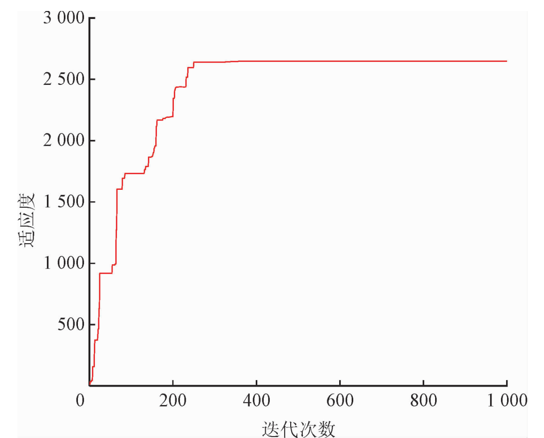


图5 修正的分数阶 Maxwell 模型布谷鸟算法适应度迭代图

Fig. 5 The fitness iteration results of cuckoo search algorithm for modified fractional Maxwell model

图6显示了修正的分数阶 Maxwell 模型对混凝土的徐变实验数据的拟合效果。其中,实线和虚线分别表示将贝叶斯算法和布谷鸟算法所得的参数取值带入模型得到的拟合效果。由图6可见,两条曲线与实验数据完美的拟合在一起,说明贝叶斯算法与布谷鸟算法所得的参数取值均是有效的。考虑到布谷鸟算法的搜索速度更快,迭代次数更少,布谷鸟搜索算法在该分数阶模型的多参数识别问题中表现更优。

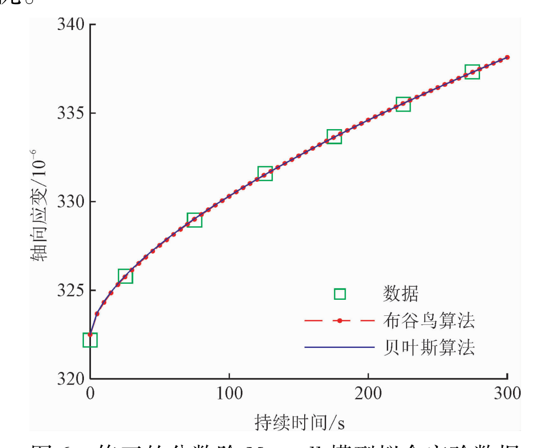


图6 修正的分数阶 Maxwell 模型拟合实验数据

Fig. 6 Experimental data fitting of modified fractional Maxwell model

表 1 为修正的分数阶 Maxwell 模型的参数估计结果。

表 1　修正的分数阶 Maxwell 参数识别结果

Tab. 1　The parameter estimation results of modified fractional Maxwell model

参数	贝叶斯算法	布谷鸟算法
α_1	0.61	0.63
$1/(\mu_{11}\tau_{11}^{\alpha})$	0.040 5	0.038 1
$1/\mu_{12}$	0.000 363	0.000 018 3
e	0.000 385	0.000 378

可以看出，两种算法所得的参数估计结果稍有偏差，但分析误差 e 可见，虽然参数取值有偏差，但均与实验数据拟合效果较好，说明在利用修正的分数阶 Maxwell 模型拟合混凝土的徐变实验数据时，相应的多参数识别问题存在解不唯一的情形。同时可以发现，尽管多参数识别问题解不唯一，但可以通过参数识别算法得到参数的近似取值，如 α_1 近似于 0.6，$1/(\mu_{11}\tau_{11}^{\alpha})$ 近似于 0.04 等，这对于数学模型的实际应用亦具有重要价值。

3.2　FPT 模型拟合及参数识别

利用 FPT 模型拟合混凝土的徐变实验数据，并确定模型参数。在贝叶斯算法中，参数初始值 $\theta_2^0 = (\alpha_2^0, \mu_{21}^0, \mu_{22}^0, \tau_{21}^0)$ 取为 (0.5,1,1,1)，在布谷鸟算法中，参数初值在 $\alpha_2^0 \in [0,1]$，$\mu_{21}^0 \in [0,25]$，$\mu_{22}^0 \in [0,5]$，$\tau_{21}^0 \in [0,100]$ 范围内随机生成，算法参数 β 取为 1.5。

图 7 为利用贝叶斯算法所得的 FPT 模型中参数 α_2、$1/(\mu_{21}\tau_{21}^{\alpha})$、$1/\mu_{22}$ 的迭代结果图。图 8 为利用布谷鸟搜索算法所得的参数迭代结果图。由图可见，在迭代一定次数后，两种算法所得的参数值亦趋于稳定，说明在 FPT 模型的参数识别问题中，贝叶斯算法和布谷鸟搜索算法都是收敛的。同样，布谷鸟搜索算法达到稳定值所需的迭代次数更少，说明布谷鸟搜索算法在该分数阶参数识别问题中效率更高，速度更快。

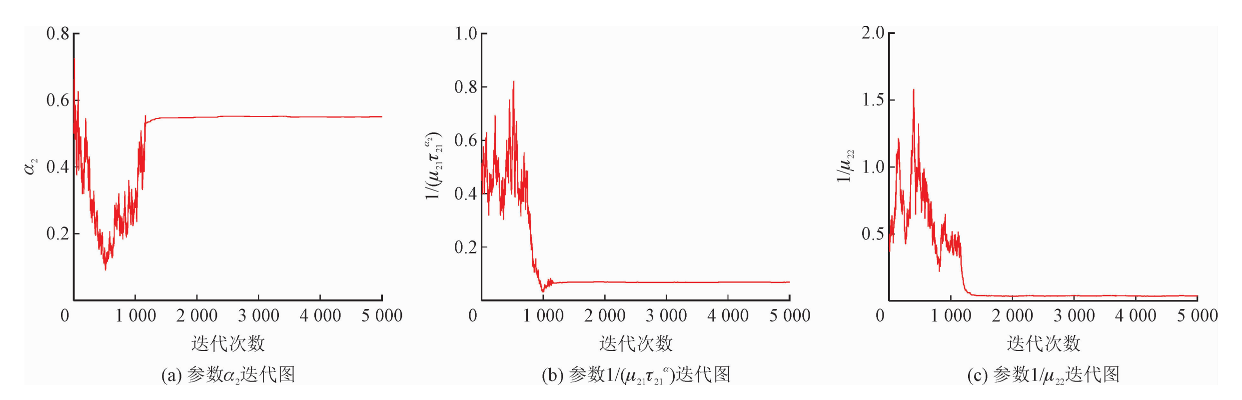


图 7　FPT 模型贝叶斯算法迭代结果

Fig. 7　The Bayesian algorithm iteration results of FPT model

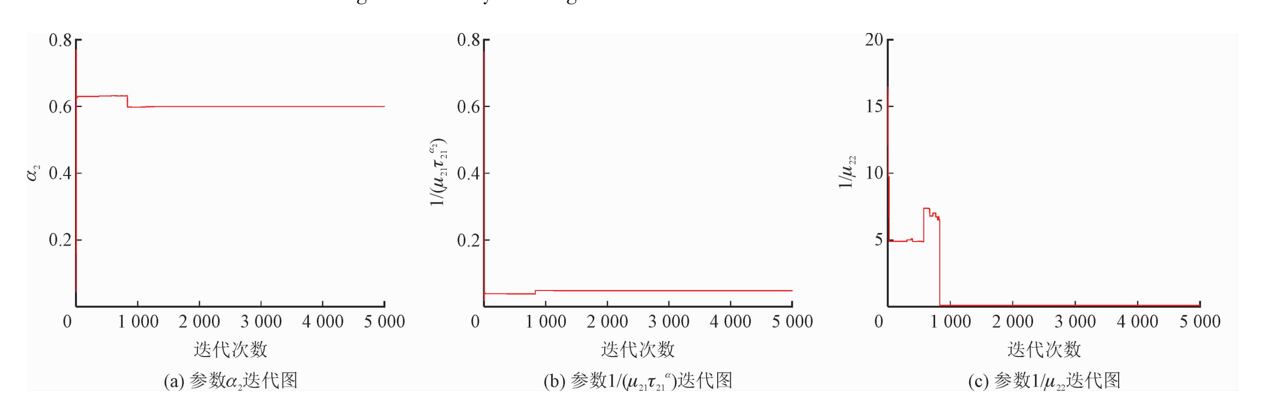


图 8　FPT 模型布谷鸟算法迭代结果

Fig. 8　The cuckoo search algorithm iteration results of FPT model

图9为FPT模型中布谷鸟算法的适应度迭代图。由图可见,随着迭代次数增加,误差逐渐减小且趋于一个稳定值,进一步说明布谷鸟搜索算法在分数阶模型的多参数识别问题中的有效性。

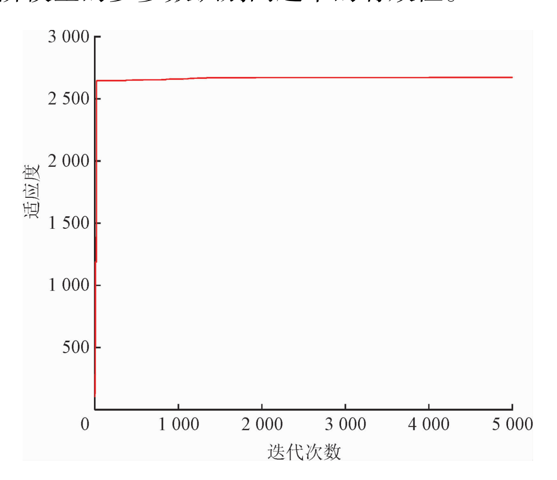


图9 FPT模型布谷鸟算法适应度迭代图

Fig. 9 The fitness iteration results of cuckoo search algorithm for FPT model

图10表示分别将两种算法所得参数带入FPT模型得到的实验数据拟合图。从拟合曲线可以看出,两条曲线与实验数据测量值几乎重合,说明贝叶斯算法与布谷鸟算法所得的参数估计结果均是有效的,在利用FPT模型拟合混凝土的徐变实验数据时,相应的多参数识别问题亦存在解不唯一的情形。在实际问题中,需要根据参数的实际意义与充分的测量数据,进一步确定模型参数的精确取值。

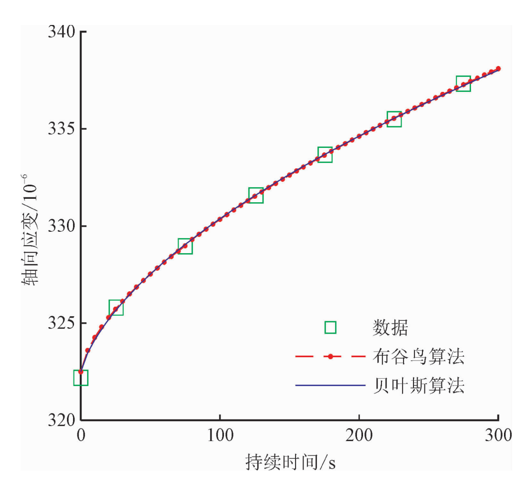


图10 FPT模型拟合实验数据

Fig. 10 Experimental data fitting of FPT model

表2为FPT模型的参数识别结果。由表2可知,虽然两种算法所得的参数结果存在偏差,但与实验数据的拟合误差均较小,考虑到布谷鸟搜索算法的效率更高,速度更快,且误差更小,说明相较于贝叶斯算法,布谷鸟搜索算法在FPT模型的参数识别问题中效果更好。

表2 FPT模型参数识别结果

Tab. 2 The parameter estimation results of FPT model

参数	贝叶斯算法	布谷鸟算法
α_2	0.55	0.60
$1/(\mu_{21}\tau_{21}^{\alpha})$	0.037 5	0.095 5
$1/\mu_{22}$	0.068	0.047 7
e	0.000 423	0.000 374

此外,对比表1、表2可得,用修正的分数阶Maxwell模型与FPT模型所得的拟合误差均达到10^{-4}量级,且误差都在0.000 4左右,说明本研究所提出的修正的分数阶Maxwell模型与FPT模型在模拟混凝土的徐变特性方面均是有效、可行的。

4 结 论

本研究对分数阶模型模拟混凝土徐变特性的多参数识别问题进行了研究。在模型方面,提出了利用修正的分数阶Maxwell模型与分数阶Poynting-Thomson模型模拟混凝土的徐变特性,通过与实验数据拟合,说明了两种模型在模拟混凝土的徐变特性方面均是有效的。在多参数识别方面,采用了贝叶斯算法和布谷鸟搜索算法两种算法同时确定了模型中的多个参数,通过参数迭代图和数据拟合误差的对比分析,验证了贝叶斯算法和布谷鸟搜索算法所得的参数估计结果均是有效的,但相较于贝叶斯算法,布谷鸟搜索算法搜索速度更快、效率更高、误差更小,在分数阶模型的多参数识别问题中性能更优。

参考文献:

[1] BAŽANT Z P, WU S T. Rate-type creep law of aging concrete based on maxwell chain[J]. Matériaux et construction, 1974, 7(1): 45-60.

[2] 苏力. 混凝土静动态粘弹性性能的理论及试验研究[D]. 北京:北京交通大学,2017.

[3] 李林忠,李培超,汪磊,等. 存在定流量汇项的分数阶导数黏弹性饱和土体一维固结解析[J]. 应用力学学报,2019,36(5):1026-1033.

LI Linzhong, LI Peichao, WANG Lei, et al. Analysis of one-dimensional consolidation of viscoelastic saturated soils with fractional order derivative subject to surface loading and a constant-flux inner sink[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2019, 36(5): 1026-1033(in Chinese).

[4] 张为民,张淳源,张平. 考虑老化的混凝土粘弹性分数导数模型[J]. 应用力学学报,2004,21(1):1-4.
ZHANG Weimin, ZHANG Chunyuan, ZHANG Ping. Viscoelastic fractional derivative model of concrete with aging[J]. Chinese journal of applied mechanics,2004,21(1):1-4(in Chinese).

[5] 梅生启. 混凝土静动态粘弹性能研究[D]. 北京:北京交通大学,2019.

[6] 朱端,朱珍德,张聪,等. 早龄期混凝土分数阶 Burgers 徐变模型研究[J]. 三峡大学学报(自然科学版),2020,42(2):58-62.
ZHU Duan, ZHU Zhende, ZHANG Cong, et al. Fractional-order burgers creep model for concrete under early age period[J]. Journal of China Three Gorges University(natural sciences),2020,42(2):58-62(in Chinese).

[7] 余伟,梁恒辉,罗映. 一种改进差分进化算法的分数阶系统辨识研究[J]. 系统仿真学报,2021,33(5):1157-1166.
YU Wei, LIANG Henghui, LUO Ying. An improved differential evolution algorithm for fractional order system identification[J]. Journal of system simulation,2021,33(5):1157-1166(in Chinese).

[8] 卫佳敏. 群智能优化算法及其在分数阶系统参数辨识中的应用研究[D]. 北京:北京交通大学,2020.

[9] 刘利民,李豪欣,李琦,等. 基于分数阶傅里叶变换的低信噪比线性调频信号参数快速估计算法[J]. 电子与信息学报,2021,43(10):2798-2804.
LIU Limin, LI Haoxin, LI Qi, et al. A fast signal parameter estimation algorithm for linear frequency modulation signal under low signal-to-noise ratio based on fractional Fourier transform[J]. Journal of electronics & information technology,2021,43(10):2798-2804(in Chinese).

[10] FAN W P, JIANG X Y, QI H T. Parameter estimation for the generalized fractional element network Zener model based on the Bayesian method[J]. Physica a: Statistical mechanics and its applications,2015,427:40-49.

[11] 杨秀. 分数阶偏微分方程高效数值算法及其参数估计[D]. 济南:山东大学,2020.

[12] CHI X Q, YU B, JIANG X Y. Parameter estimation for the time fractional heat conduction model based on experimental heat flux data[J]. Applied mathematics letters,2020,102:106094.

[13] XU M Y, TAN W C. Representation of the constitutive equation of viscoelastic materials by the generalized fractional element networks and its generalized solutions[J]. Science in China series g: Physics, mechanics and astronomy,2003,46(2):145-157.

[14] 解益,李培超,汪磊,等. 分数阶导数黏弹性饱和土体一维固结半解析解[J]. 岩土力学,2017,38(11):3240-3246.
XIE Yi, LI Peichao, WANG Lei, et al. Semi-analytical solution for one-dimensional consolidation of viscoelastic saturated soil with fractional order derivative[J]. Rock and soil mechanics,2017,38(11):3240-3246(in Chinese).

[15] 齐海涛,徐明瑜. 分数阶黏弹性模型的蠕变柔量:广义 Zener 和 Poynting-Thomson 模型[J]. 山东大学学报(理学版),2004,39(3):42-48.
QI Haitao, XU Mingyu. Creep compliance of fractional viscoelastic models: Generalized Zener and Poynting-Thomson models[J]. Journal of Shandong University(natural science),2004,39(3):42-48(in Chinese).

[16] XU H Y, JIANG X Y. Creep constitutive models for viscoelastic materials based on fractional derivatives[J]. Computers & mathematics with applications,2017,73(6):1377-1384.

[17] 高思云,杨晨. 利用贝叶斯模型进行热参数估计[J]. 系统仿真学报,2006,18(6):1462-1465.
GAO Siyun, YANG Chen. Bayesian model to parameter estimation[J]. Journal of system simulation,2006,18(6):1462-1465(in Chinese).

[18] 陈梦成,杨超,方苇,等. 混凝土徐变的 Gamma 模型参数估计研究[J]. 铁道学报,2021,43(5):204-212.
CHEN Mengcheng, YANG Chao, FANG Wei, et al. Research on parameter estimation of concrete creep based on Gamma model[J]. Journal of the China railway society,2021,43(5):204-212(in Chinese).

[19] 张晓凤,王秀英. 布谷鸟搜索算法综述[J]. 计算机工程与应用,2018,54(18):8-16.
ZHANG Xiaofeng, WANG Xiuying. Survey of cuckoo search algorithm[J]. Computer engineering and applications,2018,54(18):8-16(in Chinese).

[20] LI X T, YIN M H. Parameter estimation for chaotic systems using the cuckoo search algorithm with an orthogonal learning method[J]. Chinese physics B,2012,21(5):050507.

[21] 陈怡萍. 布谷鸟算法及应用研究[D]. 杭州:浙江大学,2019.

[22] 卫佳敏,于永光,张硕. 基于改进的布谷鸟搜索算法对分数阶生物系统的参数估计[J]. 控制理论与应用,2019,36(8):1227-1238.
WEI Jiamin, YU Yongguang, ZHANG Shuo. Parameter estimation of fractional dynamical models arising from biological systems using an improved cuckoo search algorithm[J]. Control theory & applications,2019,36(8):1227-1238(in Chinese).

（编辑　李坤璐）